АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Основан в 1989 году

Выпуск 4

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1992

УДК 517.95

Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев

О КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С КИНЕМАТИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ

В гельдеровских пространствах функций доказана разрешимость при малом времени модифицированной задачи Стефана, в которой температура на поверхности раздела фаз пропорциональна кривизне этой поверхности и скорости ее перемещения вдоль нормали.

В классической задаче Стефана на свободной границе задается постоянное значение температуры $u(x, t) = 0$. Однако, как показано, например, в [1], физически оправданной является такая постановка задачи, при которой температура на свободной границе зависит от ее скорости перемещения и кривизны. В данной работе мы доказываем разрешимость такой задачи при малом времени в классах гладких функций. Актуальность изучения этой модифицированной задачи Стефана связана также и с тем, что в [1] она получается как некоторый предел в краевой задаче для уравнений фазовых полей.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — заданная область в R^3 и граница $\partial\Omega$ состоит из двух непересекающихся компонент Γ^+ и Γ^-, причем Γ^+ лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ^-. Пусть поверхность Γ делит Ω на две связные подобласти $\Omega^\pm$, так, что $\partial\Omega^\pm = \Gamma \cup \cup \Gamma^\pm$. Пусть $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ — некоторые координаты на Γ, $y(\omega) \in \Gamma$ — соответствующая точка в R^3, $\bar{\nu}(\omega)$ — нормаль к Γ, направленная внутрь Ω^+. Пусть также $\gamma_0 > 0$, такое, что поверхности $\{y = y(\omega) \pm 2\bar{\nu}(\omega)\gamma, 0 < \gamma \leqslant \gamma_0\}$ не имеют самопересечений и не пересекаются с Γ и $\Gamma^\pm$. Введем обозначения: $\Gamma_T = \Gamma \times [0, T]$; $\Gamma_T^\pm = \Gamma^\pm \times [0, T]$; $\Omega^\pm_{\rho,T}$ — области, ограниченные плоскостями $\tau = 0$, $\tau = T$, поверхностями $\Gamma_T^\pm$ и поверхностью $\Gamma_{\rho,T} = \{(y, \tau) : y = y(\omega) + \bar{\nu}(\omega)\,\rho(\omega, \tau),\ \tau \in [0, T]\}$, где $|\rho(\omega, \tau)| < \gamma_0$. Функция $\rho(\omega, \tau)$ позволяет параметризировать искомую поверхность $\Gamma_{\rho,T}$ в терминах ее отклонения по нормали от заданной цилиндрической поверхности Γ_T (см. [2]). Модифицированная задача Стефана состоит в нахождении функций $u^{\pm}(y, \tau)$ и $\rho(\omega, \tau)$, определенных соответственно в областях $\Omega_{\rho,T}^{\pm}$ и на Γ_T и удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial \tau} - a^{\pm}\Delta_y u^{+} = 0, \quad (y, \tau) \in \Omega_{\rho,T}^{\pm};$$

$$\varkappa v = (a^{-}\nabla_y u^{-} - a^{+}\nabla_y u^{+})\vec{n}(y, \tau);$$

$$u^{+} = u^{-} = \alpha k(y, \tau) - \beta v, (y, \tau) \in \Gamma_{\rho,T}; \tag{1}$$

$$u^{\pm} = b^{\pm}(y, \tau), \quad (y, \tau) \in \Gamma_T^{\pm};$$

$$u^{\pm}(y, 0) = u_0^{\pm}(y), \quad \rho(\omega, 0) = 0,$$

где $a^{\pm}$, $\varkappa$, α, β — положительные постоянные; $k(y, \tau)$ — полусумма главных кривизн свободной поверхности $\Gamma_{\rho,T}$; v — скорость перемещения свободной границы в направлении нормали $\bar{n}(y, \tau)$ к $\Gamma_{\rho,T}$, направленной внутрь $\Omega_{\rho,T}^{+}$; $b^{\pm}(y, \tau)$, $u_0^{\pm}(y)$ — заданные функции; $\nabla_y = (\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2, \partial/\partial y_3)$, $\Delta_y = \nabla_y^2$.

Теорема. Пусть для задачи (1) выполнены условия согласования до первого порядка, $\Gamma \in H^{5+\alpha}$, $\Gamma^{\pm} \in H^{5+\alpha}$, $b^{\pm}(y, \tau) \in H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}$, $u_0^{\pm}(y) \in H^{4+\alpha,(4+\alpha)/2}(\bar{\Omega}^{\pm})$. Тогда найдется такое $T_0 > 0$, зависящее от данных задачи, что для $0 < T \leqslant_0$ существует решение

$$u^{\pm}(y, \tau) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\bar{\Omega}_{\rho,T}^{\pm}), \quad \rho(\omega, \tau) \in H^{3+\alpha,(3+\alpha)/2}(\Gamma_T).$$

Замечание. Поверхность Γ в R^3 задается уравнением $\bar{R} = \bar{R}(\omega_1, \omega_2) = y(\omega) = (y_1(\omega_1, \omega_2), y_2(\omega_1, \omega_2), y_3(\omega_1, \omega_2))$. Как уже было сказано, поверхность $\Gamma_{\rho,T}$ задается уравнением $\bar{r} = \bar{r}(\omega) = \bar{R}(\omega) + \bar{\nu}(\omega, \tau)\rho(\omega, \tau)$, тогда полусумма главных кривизн $\Gamma_{\rho,T}$ вычисляется по формулам [3]

$$k(y, \tau) = \frac{EN + LG - 2MF}{EG - F^2} = K(\omega, \rho, \rho_\omega, \rho_{\omega\omega}),$$

где $L = (\bar{r}_{\omega_1\omega_1}, \bar{n})$, $M = (\bar{r}_{\omega_1\omega_2}, \bar{n})$, $N = (\bar{r}_{\omega_2\omega_2}, \bar{n})$, $E = (\bar{r}_{\omega_1}, \bar{r}_{\omega_1})$, $F = (\bar{r}_{\omega_1}, \bar{r}_{\omega_2})$, $G = (\bar{r}_{\omega_2}, \bar{r}_{\omega_2})$, т. е. коэффициенты первой и второй квадратичной формы поверхности $\Gamma_{\rho,T}$. При этом мы потребуем, чтобы $(EF - G^2)|_{\rho=0} \geqslant \delta > 0$. При таком определении $k(y, \tau)$ кинетическое соотношение на свободной границе (первое условие на $\Gamma_{\rho,T}$ в (1)) совпадает по смыслу с аналогичным условием в [1].

2. Редукция исходной задачи. В окрестности $N = \{y \in \Omega : \mathrm{dist}(y, \Gamma) < \gamma_0\}$ поверхности Γ введем координаты (ω, λ), такие, что

$$y(\omega, \lambda) = y(\omega) + \lambda\bar{n}(\omega), \quad |\lambda| < \gamma_0.$$

В этих координатах $N = \{y(\omega, \lambda) : (\omega, \lambda) \in \Gamma \times (-\gamma_0, \gamma_0)\}$. Пусть $\chi(\lambda) \in C_0^{\infty}$ и равна единице в окрестности $\lambda = 0$. Определим взаимно однозначное отображение $e_\rho(x, t)$ области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ на эту же область следующим образом (см. [2]): $e_\rho(x, t) : (x, t) \mapsto (y, \tau) = (y(\omega(x), \lambda(x) + \chi(\lambda(x))\rho(\omega(x), t)), t)$, где $(\omega(x), \lambda(x))$ — координаты точки $x \in N$. При таком отображении Γ_T переходит в $\Gamma_{\rho,T}$, а точки поверхностей $\Gamma_T^{\pm}$ остаются на месте. В координатах (ω, λ) уравнение поверхности $\Gamma_{\rho,T}$ имеет вид

$$\Phi_\rho(y, \tau) \equiv \lambda(y) - \rho(\omega(y), \tau) = 0.$$

В таком случае $\bar{n}(y, \tau) = \nabla_y\Phi_\rho/|\nabla_y\Phi_\rho|$, $v = -\Phi_{\rho\tau}|\nabla_y\Phi_\rho|$, и первое условие на границе $\Gamma_{\rho,T}$ в задаче Стефана принимает вид

$$\varkappa\frac{\partial\Phi_\rho}{\partial\tau} = a^{-}(\nabla_y u^{-}, \nabla_y\Phi_\rho) - a^{+}(\nabla_y u^{+}, \nabla_y\Phi_\rho). \tag{2}$$

Если в (2) перейти к переменным (x, t), то можно получить

$$\varkappa\frac{\partial\rho}{\partial t} = a^{-}(\nabla_\rho u^{-}, \nabla_\rho\Phi_\rho) - a^{+}(\nabla_\rho u^{+}, \nabla_\rho\Phi_\rho), \quad (x, t) \in \Gamma_T,$$

где $\nabla_\rho = (E_\rho^*)^{-1}\nabla_x$, $\nabla = \nabla_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $E_\rho^*(x, t)$ — матрица, сопряженная к матрице Якоби отображения $e_\rho|_{t=\mathrm{const}}: x \mapsto y$. Функция $\Phi_\rho(y, \tau) = \Phi_\rho(e_\rho(x, t), t) = 0$ на Γ_T, т. е. при $\lambda(x) = 0$, поэтому $\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_i} = 0$ на Γ_T, и, следовательно,

$$(\nabla_\rho u^\pm, \nabla_\rho \Phi_\rho) = \left(\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial u^\pm}{\partial \omega_k}\nabla_\rho \omega_k + \frac{\partial u^\pm}{\partial \lambda}\nabla_\rho \lambda, \nabla_\rho \lambda\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} S^{(k)}(\omega, \rho, \rho_\omega)\frac{\partial u^\pm}{\partial \omega_k} + S(\omega, \rho, \rho_\omega)\frac{\partial u^\pm}{\partial \lambda}, \quad (x, t) \in \Gamma_T,$$

где $S^{(k)}$, S — гладкие функции своих аргументов (их гладкость увеличивается с ростом гладкости Γ), такие, что

$$S(\omega, 0, 0) = 1, \quad S^{(k)}(\omega, 0, 0) = 0, \quad S\rho\omega_i(\omega, 0, 0) = 0.$$

Определим еще вектор $\bar{h}_\rho(x, t) = \left\{\frac{\partial x_1}{\partial \tau}, \frac{\partial x_2}{\partial \tau}, \frac{\partial x_3}{\partial \tau}\right\}\Big|_{(y,\tau)=e_\rho(x,t)}$ и величину $m(\omega, \rho, \rho_\omega) \equiv |\nabla_\rho \lambda|^{-1}$, так, что $m(\omega, 0, 0) = 1$.

Теперь, переходя в задаче (1) к переменным (x, t), мы можем сформулировать ее следующим образом. Требуется найти функции $u(x, t)$ и $\rho(\omega, t)$, определенные соответственно в $\Omega_T^\pm = \Omega^\pm \times (0, T)$ и на Γ_T по условиям:

$$L_\rho^\pm u^\pm \equiv \frac{\partial u^\pm}{\partial t} + (\bar{h}_\rho, \nabla) u - a^\pm \nabla_\rho^2 u^\pm = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T^\pm;$$

$$\varkappa \frac{\partial \rho}{\partial t} = S(\omega, \rho, \rho_\omega)\left[a^- \frac{\partial u^-}{\partial \lambda} - a^+ \frac{\partial u^+}{\partial \lambda}\right] + \sum_{k=1}^{2} S^{(k)}(\omega, \rho, \rho_\omega) \times$$

$$\times \left[a^- \frac{\partial u^-}{\partial \omega_k} - a^+ \frac{\partial u^+}{\partial \omega_k}\right], \quad u^+ = u^- = \alpha K(\omega, \rho, \rho_\omega, \rho_{\omega\omega}) -$$

$$- \beta \rho_t m(\rho, \rho_\omega, \omega), \quad (x, t) \in \Gamma_T; \tag{3}$$

$$u^\pm = b(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T^\pm; \quad u^\pm(x, 0) = u_0^\pm(x); \quad \rho(\omega, 0) = 0.$$

Определим функции $s(\omega, t) \in H^{4+\alpha, (4+\alpha)/2}(\Gamma_T)$ и $w^\pm(x, t) \in H^{4+\alpha, (4+\alpha)/2} \times (\bar{\Omega}_T^\pm)$, такие, что $w^+ = w^-$ на Γ_T, $w^\pm(x, 0) = u_0^\pm(x)$, $\partial w^\pm/\partial t(x, 0) = u_t^\pm(x, 0)$, $s(\omega, 0) = 0$, $\partial s/\partial t(\omega, 0) = \partial \rho/\partial t(\omega, 0)$, где $u_t^\pm(x, 0)$ определяется по начальным условиям, а $\rho_t(\omega, 0)$ из условий согласования. Эти функции можно построить так, чтобы при $\bar{R}(\omega) \in H^{5+\alpha}$ выполнялись неравенства (см. [4])

$$|w^+|_{\Omega_T^+}^{(4+\alpha)} + |w^-|_{\Omega_T^-}^{(4+\alpha)} + |s|_{\Gamma_T}^{(4+\alpha)} \leqslant C(T)(|u_0^+|^{(4+\alpha)} + |u_0^-|^{(4+\alpha)}).$$

Вводя новые неизвестные $v^\pm = u^\pm(x, t) - w^\pm(x, t)$; $\sigma(\omega, t) = \rho(\omega, t) - s(\omega, t)$, задачу (3) сводим к задаче с нулевыми начальными условиями.

Введем операторы $L_0^\pm \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a^\pm \nabla^2$, $L_\rho^\pm \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{h}_\rho, \nabla) - a^\pm \nabla_\rho^2$, которые связаны между собой соотношением $(L_0^\pm u) \circ e_\rho = L_\rho^\pm(u \circ e_\rho)$, и функции $\theta^\pm(x, t) = v^\pm - (\nabla w^\pm, \delta e_\sigma)$, где вектор $\delta e_\sigma(x, t) = \frac{\partial x}{\partial \lambda}(\omega, \lambda) \times \chi(\lambda)\sigma(\omega(x), t)$. Задачу (3) перепишем в следующем виде:

$$L_0^\pm \theta^\pm = -[(L_0^\pm w^\pm) \circ e_\rho - (L_0^\pm w) \circ e_s] - L_s^\pm w^\pm - (L_\rho^\pm - L_0^\pm)(w^\pm - w^\pm \circ e_\rho) +$$

$$+ (L_s^\pm - L_0^\pm)(w^\pm - w^\pm \circ e_s) - L_0^\pm[w^\pm + (\nabla w^\pm, \delta e_\rho) - w^\pm \circ e_\rho] +$$

$$+ L_0^\pm[w^\pm + (\nabla w^\pm, \delta e_s) - w^\pm \circ e_s] - (L_\rho^\pm - L_0^\pm)v^\pm \equiv F_0^\pm(v^\pm, \sigma); \tag{4}$$

$$\varkappa \frac{\partial \sigma}{\partial t} + a^+ \frac{\partial \theta^+}{\partial n} - a^- \frac{\partial \theta^-}{\partial n} = -\sum_{k=1}^{2} b_i(\omega, t)\sigma_{\omega_i} - \varkappa \frac{\partial s}{\partial t} +$$

$$+\left(a^-\frac{\partial w^-}{\partial n}-a^+\frac{\partial w^+}{\partial n}\right)S(\omega,s,s_\omega)+\sum_{k=1}^{2}S^{(k)}(\omega,s,s_\omega)\times$$

$$\times\left[a^-\frac{\partial w^-}{\partial\omega_k}-a^+\frac{\partial w^+}{\partial\omega_k}\right]+\left(a^+\frac{\partial v^+}{\partial n}-a^-\frac{\partial v^-}{\partial n}\right)(1-S(\omega,\rho,\rho_\omega))-$$

$$-\left(a^+\frac{\partial w^+}{\partial n}-a^-\frac{\partial w^-}{\partial n}\right)\times\Bigg[S(\omega,\rho,\rho_\omega)-S(\omega,s,s_\omega)-$$

$$-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial S}{\partial S_{\omega_i}}(\omega,s,s_\omega)\,\sigma_{\omega_i}\Bigg]-\sum_{k=1}^{2}\left(a^+\frac{\partial w^+}{\partial\omega_k}-a^-\frac{\partial w^-}{\partial\omega_k}\right)\times$$

$$\times\left[S^{(k)}(\omega,\rho,\rho_\omega)-S^{(k)}(\omega,s,s_\omega)-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial S^{(k)}}{\partial S_{\omega_i}}(\omega,s,s_\omega)\,\sigma_{\omega_i}\right]-$$

$$-\sum_{k=1}^{2}\left(a^+\frac{\partial v^+}{\partial\omega_k}-a^-\frac{\partial v^-}{\partial\omega_k}\right)S^{(k)}(\omega,\rho,\rho_\omega)-$$

$$-\left(a^+\frac{\partial^2 w^+}{\partial n^2}-a^-\frac{\partial^2 w^-}{\partial n^2}\right)\sigma\equiv F_1(v^+,v^-,\sigma); \qquad (5)$$

$$\theta^+-\theta^-=+d(\omega,t)\,\sigma\equiv F_2(v^+,v^-,\sigma); \qquad (6)$$

$$-\alpha\sum_{i,j=1}^{2}K_{\omega_i\omega_j}(\omega,s,s_\omega,s_{\omega\omega})\,\sigma_{\omega_i\omega_j}+\beta\sigma_t m(\omega,s,s_\omega)=-\theta^+-\frac{\partial w^+}{\partial n}\sigma-$$

$$-\beta s_t m(\omega,\rho,\rho_\omega)+\beta\sigma_t[m(\omega,s,s_\omega)-m(\omega,\rho,\rho_\omega)]+\alpha[K(\omega,\rho,\rho_\omega,\rho_{\omega\omega})-$$

$$-K(\omega,s,s_\omega,s_{\omega\omega})-K_s(\omega,s,s_\omega,s_{\omega\omega})\,\sigma-K_{s_\omega}(\omega,s,s_\omega,s_{\omega\omega})\,\sigma_\omega- \qquad (7)$$

$$-K_{s_{\omega\omega}}(\omega,s,s_\omega,s_{\omega\omega})\,\sigma_{\omega\omega}]+\alpha K(\omega,s,s_\omega,s_{\omega\omega})+\alpha K_s(\omega,s,s_\omega,s_{\omega\omega})\,\sigma+$$

$$+\alpha K_{s_\omega}(\omega,S,S_\omega,S_{\omega\omega})\,\sigma_\omega\equiv F_3(\sigma),$$

где $b_i(\omega,t)=\left(a^+\frac{\partial w^+}{\partial n}-a^-\frac{\partial w^-}{\partial n}\right)\frac{\partial S}{\partial S_{\omega_i}}(\omega,s,s_\omega)+\sum_{k=1}^{2}\left(a^+\frac{\partial w^+}{\partial\omega_k}-a^-\times\right.$ $\left.\times\frac{\partial w^-}{\partial\omega_k}\right)\frac{\partial S^{(k)}}{\partial s_{\omega_i}}(\omega,s,s_\omega)$, $d(\omega,t)=\frac{\partial w^+}{\partial n}-\frac{\partial w^-}{\partial n}$.

Таким образом, исходная задача Стефана преобразована к виду $A\psi = F(\psi)$, где $\psi=(\theta^+,\theta^-,\sigma)$, и линейный оператор A определен левыми частями равенств (4) — (7), а нелинейный оператор $F(\psi)=(F_0^+(\psi), F_0^-(\psi), F_1(\psi), F_2(\psi), F_3(\psi))$ — правыми. Правые части (4) — (7) содержат некоторые слагаемые, определенные начальными условиями, линейно входящие младшие производные ψ, а при старших производных всегда содержатся малые по норме при малом времени множители.

3. Доказательство теоремы. Определим пространства [4, гл. 4]:

$$H_\psi=\overset{0}{H}{}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\bar\Omega_T^+)\times\overset{0}{H}{}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\bar\Omega_T^-)\times\overset{0}{H}{}^{3+\alpha,\frac{3+\alpha}{2}}(\Gamma_T),$$

$$H_F=\overset{0}{H}{}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar\Omega_T^+)\times\overset{0}{H}{}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar\Omega_T^-)\times\overset{0}{H}{}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T)\times$$

$$\times\overset{0}{H}{}^{2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2}}(\Gamma_T)\times\overset{0}{H}{}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma_T).$$

Легко видеть, что оператор $A: H_\psi\to H_F$ имеет ограниченный обратный на H_F. Действительно, из соотношения (7) легко находится функция $\sigma(\omega, t)$, причем

$$|\sigma|_{\Gamma_T}^{(3+\alpha)}\leqslant C|F_3|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)}.$$

Тогда соотношения (4) — (6) после подстановки найденной функции $\sigma(\omega, t)$ представляют собой линейную задачу сопряжения, из которой определяют $\theta^{\pm}(x, t)$, а следовательно, $v^{\pm}(x, t)$, причем

$$|\theta^{\pm}|^{(2+\alpha)}_{\Omega_T^{\pm}} \leqslant C(|F_0^{+}|^{(\alpha)}_{\Omega_T^{+}} + |F_0^{-}|^{(\alpha)}_{\Omega_T^{-}} + |F_1|^{(1+\alpha)}_{\Gamma_T} + |F_2|^{(2+\alpha)}_{\Gamma_T} + |F_3|^{(1+\alpha)}_{\Gamma_T}|,$$

т. е. $\| A^{-1}F\|_{H_{\psi}} \leqslant C \| F\|_{H_F}$.

Итак, исходная задача может быть представлена в виде

$$\psi = A^{-1}F(\psi).$$

Пусть B_r — шар с центром в нуле в пространстве H_{ψ}. Аналогично [5] проверяется, что при достаточно малых r и T отображение $A^{-1}F$ удовлетворяет в B_r условиям принципа сжатых отображений, из чего вытекает доказательство теоремы.

Замечание. Достаточно простое доказательство существования решения задачи с кинетическим условием на свободной границе объясняется наличием в этом условии сильных регуляризирующих членов, исчезающих при $\alpha = \beta = 0$. В связи с этим приведем формулировку модельной задачи для задачи Стефана с регуляризацией, получающуюся при замораживании коэффициентов в уравнениях и граничных условиях линейного оператора A в некоторой точке $(x, t) = (x_0, 0)$ и распрямлении границы. Требуется найти функции $u^{\pm}(z, t)$ и $\rho(z', t)$ по условиям $(z = (z_1, z_2, z_3),\ z' = (z_1, z_2))$:

$$\frac{\partial u^{\pm}}{\partial t} - a^{\pm}\Delta u^{\pm} = f_0^{\pm}(z, t), \quad (z, t) \in R_T^{\pm} = \{(z, t) : \pm z_3 \geqslant 0,\ t \in (0, T)\};$$

$$\varkappa\frac{\partial \rho}{\partial t} + a^{+}\frac{\partial u^{+}}{\partial z_3} - a^{-}\frac{\partial u^{-}}{\partial z_3} + \sum_{k=1}^{2} b_k\rho_{z_k} = f_1(z', t),$$

$$u^{+} - u^{-} + d\rho = f_2(z', t), \tag{8}$$

$$u^{+} - \alpha\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\rho_{z_i z_j} + \beta\rho_t = f_3, \quad (z', t) \in R_T' = \{(z, t), \ z_3 = 0,\ t \in (0, T)\},$$

где $a^{\pm}$, $\varkappa$ — заданные положительные постоянные; $b_k \in R^1$; $a_{11} = \dfrac{q_{22}}{q_1q_2 - q_3^2}$; $a_{22} = \dfrac{q_{11}}{q_1q_2 - q_3^2}$; $a_{21} = a_{12} = \dfrac{q_{12}}{q_1q_2 - q_3^2}$; $q_{ij} = (\overline{R}_{\omega_i}, \overline{R}_{\omega_j})$, так что a_{ij} — знакоопределенная матрица. При $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ слагаемое u^{+} в последнем условии (8) является младшим, его можно перенести в правую часть и, таким образом, найти $\rho(z', t)$, что фактически и было сделано при доказательстве теоремы, а затем по известному $\rho(z', t)$ определить $u^{\pm}(z, t)$. При $\alpha = \beta = 0$ доказательство разрешимости задачи (8) в гладких классах значительно усложняется ([5]). Получение априорных оценок решения задачи (8) в гладких классах при всех $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ может быть полезным при изучении сходимости решения задачи Стефана с кинетическим условием к решению классической задачи Стефана при $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$.

1. *Caginalp G.* Stefan and Hele-Show type model as asymptotic limits of the phase-field equations // Phys. Rev.— 1989.— 39, N 11.— P. 5887—5896.
2. *Hanzawa E. T.* Classical solutions of the Sthefan problem // Tohoky Math. J.— 1981.— 33.— P. 297—335.
3. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии.— М.; Л. : ГИТТЛ, 1950.— 427 с.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
5. *Базалий Б. В., Дягтярев С. П.* О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости // Мат. сб.— 1987.— 132 (74), № 1.— С. 3—19.

Ин-т прикл. математики
и механики АН Украины, Донецк

Получено 22.10.90